Circulation générale dans l'atmosphère terrestre

Dr. Pascal Frèrebeau

4 décembre 2014

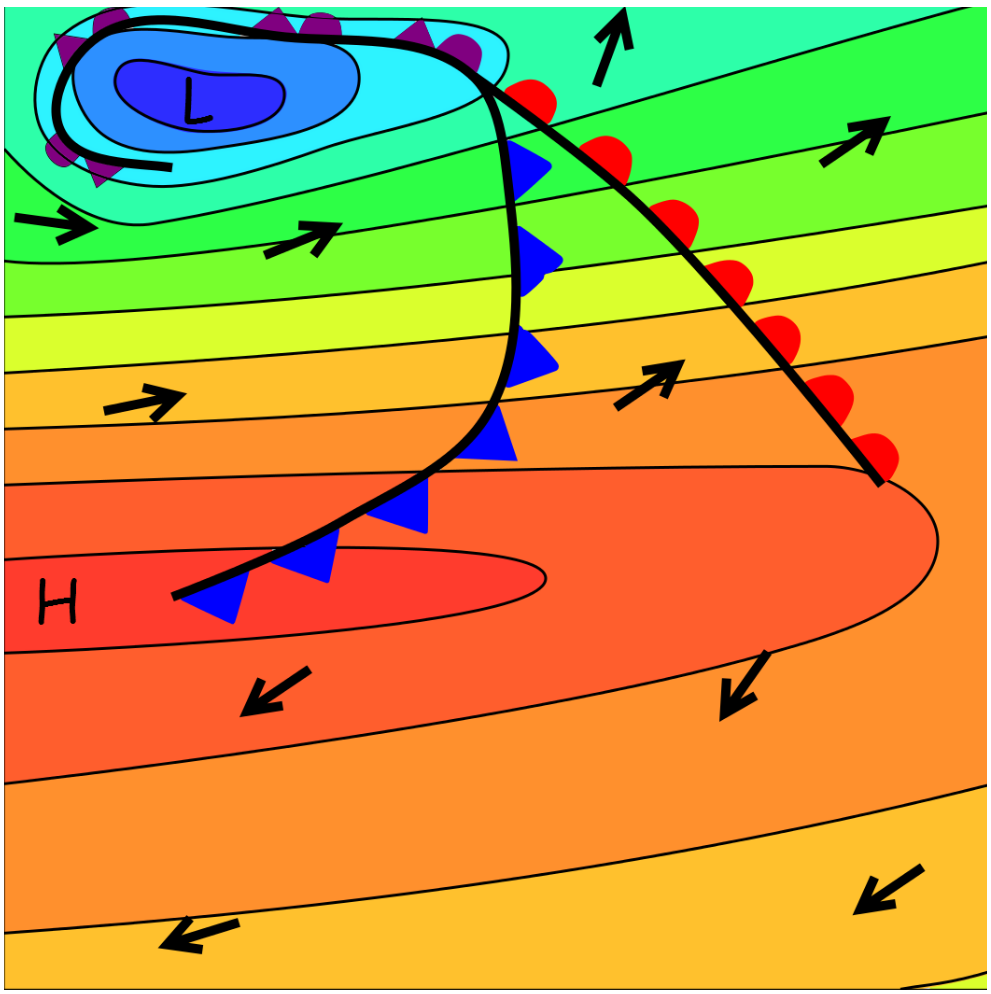

Table des matières

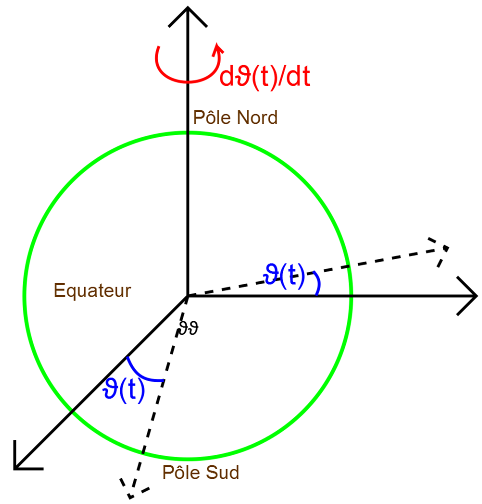

FIGURE 1 –
Repère fixé dans la Terre, en son centre (pointillés) versus repère centré au centre de la Terre qui ne suit pas la rotation de cette planète sur elle-même (trait plein). Le deuxième est considéré comme un repère galiléen pour décrire la circulation générale de l'air atmosphérique. $\theta\,(t)$ *est l'angle de rotation qui mesure la position du repère tournant par rapport au repère galiléen.* $\frac{d\theta(t)}{dt}$ *est la vitesse angulaire du système tournant et de la Terre sur elle-même.*

1 Démonstration de l'équation du mouvement

1.1 Définition d'un repère galiléen

Un repère galiléen est un repère, dans lequel un corps soumis à aucune force se déplace en suivant un mouvement rectiligne uniforme. Un repère galiléen ne tourne pas et n'accélère pas. Dans la pratique, les repères considérés comme galiléens ne le sont pas au sens strict, mais ils peuvent être approximativement considérés comme tels pour la résolution d'un problème donné.

Par exemple, la surface de la Terre peut être considérée comme un repère galiléen pour étudier des mouvements dont la durée est de quelques secondes, mais pas quand une journée entière est considérée. Dans le premier cas, la rotation de la Terre sur elle-même est négligeable, tandis que dans le second cas, la Terre a effectué une rotation complète autour de son axe pendant la durée de l'observation. Les phénomènes météorologiques mis en jeu dans la circulation générale de l'air atmosphérique ont une durée comprise entre plusieurs heures et plusieurs jours. Un repère fixé dans ou sur la Terre ne peut pas être considéré comme un repère galiléen pour cette application. En revanche, un repère centré au centre de la Terre qui ne suit pas la rotation de la Terre sur elle-même peut être pris comme repère galiléen (voir figure 1). A vrai dire, ce dernier repère tourne lui-même autour du Soleil, mais suffisamment lentement pour cette application (période de un an). Pour décrire des mouvements dont la durée s'étend sur plusieurs mois ou années, il faudrait prendre pour repère galiléen un repère centré dans le Soleil qui ne suit pas la rotation du Soleil sur lui-même. Ce dernier repère tourne lui aussi, car le Soleil tourne autour du centre de notre galaxie, mais suffisamment lentement si la période d'observation ne dépasse pas quelques années. Etc...

1.2 La deuxième loi de Newton

La circulation de l'air atmosphérique est basée sur la seconde loi de Newton. Cette loi nous dit que dans un repère galiléen, l'accélération d'un corps dans une direction est égale à la composante dans cette direction de la résultante de toutes les forces qui lui sont appliquées divisée par sa masse :

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} = m\overrightarrow{a} \tag{1}$$

où $\overrightarrow{F_i}$ est la i-ème force (sur un total de N) appliquée au corps. m est sa masse et $\overrightarrow{a}$ son accélération. Attention : comme équation (1) n'est valable que dans un repère galiléen, il faut choisir un repère qui ne suit pas la rotation de la Terre sur elle-même. Le plus simple est de choisir le repère fixe centré au centre de la Terre (voir figure 1).

Les corps considérés dans l'atmosphère terrestre sont des particules d'air prises suffisamment petites. Pour la théorie, elles sont même prises "infiniement petites" (on parle de particules d'air élémentaires). Quand la masse d'un telle particule d'air est notée d^3m et la i-ème force qui lui est appliquée est notée $d^3\overrightarrow{F_i}$ (où d^3 indique que la particule d'air est infiniement petite selon les trois dimensions de l'espace), on peut écrire dans un repère galiléen :

$$\sum_{i=1}^{N} d^3\overrightarrow{F_i} = d^3m\overrightarrow{a} \tag{2}$$

1.3 Liste des forces appliquées

Les forces suivantes sont appliquées sur une particule d'air.

1.3.1 La gravitation

La gravitation est une force d'attraction qui existe entre tous les corps existants. Quand deux corps (K) et (K') avec les masses m et m' sont présents, la force de gravitation appliquée par (K') sur (K) s'écrit :

$$\overrightarrow{F_G} = G\frac{mm'}{r^2}\overrightarrow{e} \tag{3}$$

où G est la constante de gravitation ($6.67384 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg.s^2}$), r est la distance entre les deux corps et $\overrightarrow{e}$ est le vecteur unitaire de (K) vers (K'). La force de gravitation appliquée par (K) sur (K') s'écrit :

$$\overrightarrow{F'_G} = -G\frac{mm'}{r^2}\overrightarrow{e} \tag{4}$$

Dans l'atmosphère terrestre, la force de gravitation appliquée par la Terre sur une particule d'air de masse d^3m (ou poids de la particule d'air) s'écrit donc :

$$d^3\overrightarrow{F_g} = -G\frac{Md^3m}{(R+z)^2}\overrightarrow{k} \tag{5}$$

où $M = 5.9736 \times 10^{24}$ kg est la masse de la Terre, $R = 6.371 \times 10^3$ km est son rayon, z est l'altitude de la particle d'air et $\overrightarrow{k}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface de la Terre dirigé vers l'espace. D'après équation (2), il s'ensuit que l'accélération correspondante (accélération de gravitation) vaut :

$$\overrightarrow{a_g} = -G\frac{M}{(R+z)^2}\overrightarrow{k} \tag{6}$$

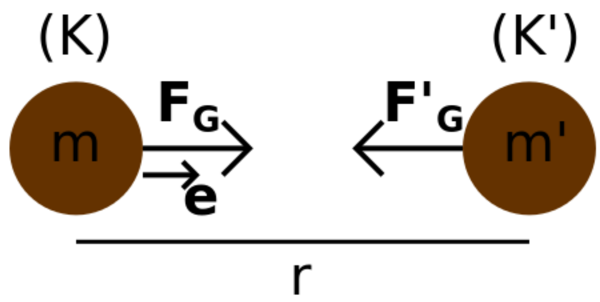

FIGURE 2 –
Représentation schématique des forces de gravitations intervenant entre deux corps (K) et (K').

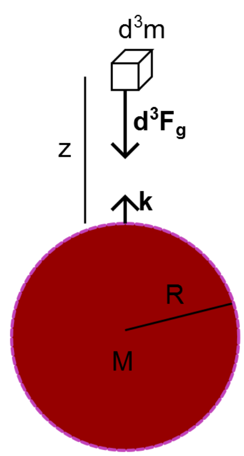

FIGURE 3 –
Représentation schématique de la force de gravitation exercée par la Terre sur une particule d'air de masse d^3m.

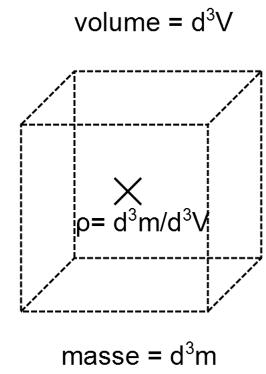

FIGURE 4 –
Représentation schématique de la densité comme fonction continue dans un fluide.

Comme $z \ll R$, z est en général négligé. De même, les forces de gravitation exercées par d'autres corps que la Terre (comme les forces de gravitation entre les différentes particules d'air) sont négligées. Ainsi, on obtient pour la norme de l'accélération de gravitation :

$$g = G\frac{M}{R^2} \approx 9.82\,\mathrm{m}.s^{-2} \tag{7}$$

A partir d'ici, nous écrivons :

$$d^3\overrightarrow{F_g} = -gd^3m\overrightarrow{k} \tag{8}$$

et

$$\overrightarrow{a_g} = -g\overrightarrow{k} \tag{9}$$

1.3.2 La force de pression

Densité La densité d'un corps (ρ) est égale à sa masse (M) divisée par son volume (V) :

$$\rho = \frac{M}{V} \tag{10}$$

Dans un fluide (comme par exemple l'atmosphère terrestre), la densité est définie en tout point comme une fonction continue. Autour d'un point quelconque, on peut imaginer un volume élémentaire d^3V (par exemple une particule d'air). Ce volume contient la masse d^3m. Par définition, au point considéré, la densité vaut :

$$\rho = \frac{d^3m}{d^3V} \tag{11}$$

L'unité de la densité dans le système SI est le kg.m^{-3}.

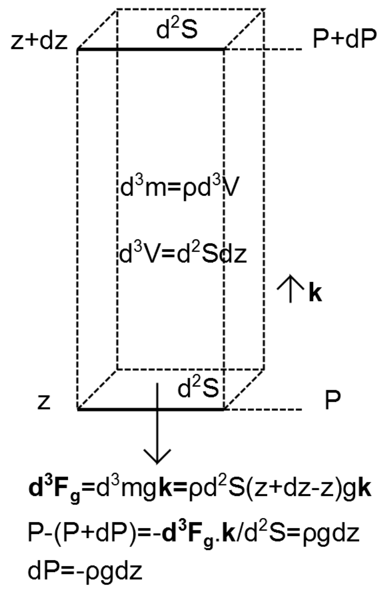

FIGURE 5 –
Illustration de la variation de pression avec l'altitude.

Pression La pression (P) est la résistance qu'un milieu exerce sur chaque corps avec lequel il est en contact. C'est une force par unité de surface. Dans l'atmosphère terrestre, la pression résulte du poids de la colonne d'air située en-dessus du point considéré. En conséquence, elle dépent principalement de l'altitude. La variation de pression entre deux niveaux très proches z et $z + dz$ vaut :

$$dP = -\rho g dz \tag{12}$$

Le signe moins indique que pression et altitude varient en sens inverse.

L'unité de la pression dans le Système International est le Pa. Mais en général, le hPa lui est préféré. Figure 5 donne un aperçu de la variation de la pression avec l'altitude. d^2S est la surface supérieure et inférieure à la limite du volume d^3V. P est la pression à l'altitude z et $P + dP$ est la pression à l'altitude $z + dz$. d^3m est la masse du volume d^3V, ρ est sa densité (considérée comme constante à l'intérieur du volume élémentaire). $d^3\overrightarrow{F_g}$, la force de gravitaion appliquée sur d^3V, est égale au poids que d^3V exerce sur un corps situé au-dessous de lui.

La force de pression qu'un corps (K) exerce sur une surface élémentaire d^2S appartenant à son bord (surface fermée (∂K)) autour du point (x, y, z) est égale à :

$$d^2\overrightarrow{F_p'}\left(x,y,z\right) = P_{in}\left(x,y,z\right)\overrightarrow{n}\left(x,y,z\right)d^2S \tag{13}$$

où $d^2\overrightarrow{F_p'}\left(x,y,z\right)$est la force de pression exercée par (K) sur d^2S, $P_{in}\left(x,y,z\right)$ est la pression au voisinage du point (x, y, z) à l'intérieur de (K) et $\overrightarrow{n}\left(x,y,z\right)$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface (∂K) au point (x, y, z).

La force de pression que l'environnement exerce sur une surface élémentaire d^2S appartenant au bord de (K) autour du point (x, y, z) s'écrit :

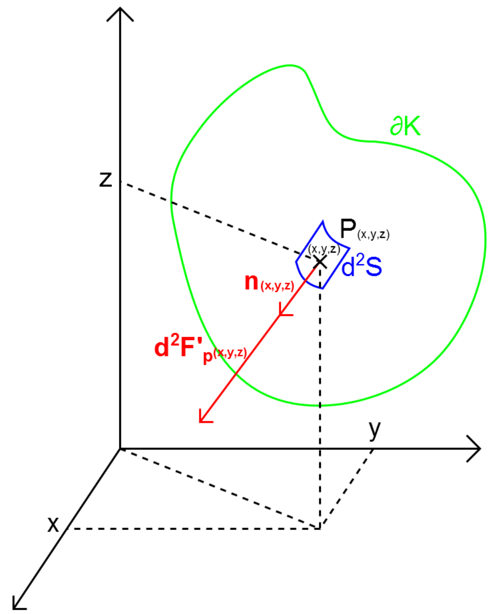

FIGURE 6 –
Représentation schématique de la définition de la force de pression.

$$d^2\overrightarrow{F_p}\,(x,y,z) = -P_{out}\,(x,y,z)\,\overrightarrow{n}\,(x,y,z)\,d^2S \tag{14}$$

où $d^2\overrightarrow{F_p}\,(x,y,z)$est la force de pression exercée par l'environnement sur d^2S et $P_{out}\,(x,y,z)$ est la pression au voisinage du point (x,y,z) à l'extérieur de (K).

La force de pression globale exercée par l'environnement sur (K) est la somme de toutes les forces élémentaires $d^2\overrightarrow{F_p}\,(x,y,z)$ sur la totalité de la surface fermée (∂K) :

$$\overrightarrow{F_p} = -\oiint_{(\partial K)} P_{out}\,(x,y,z)\,\overrightarrow{n}\,(x,y,z)\,d^2S \tag{15}$$

Si la pression est une fonction continue, comme c'est le cas dans l'atmosphère terrestre, on a : $P_{in}\,(x,y,z) = P_{out}\,(x,y,z) = P\,(x,y,z)$. On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{F_p} = -\oiint_{(\partial K)} P\,(x,y,z)\,\overrightarrow{n}\,(x,y,z)\,d^2S \tag{16}$$

Une forme du théorie de Gauss nous dit que :

$$\iiint_V \left(\overrightarrow{\nabla} f\,(x,y,z)\right) d^3V = \oiint_{(\partial V)} f\,(x,y,z)\,\overrightarrow{n}\,(x,y,z)\,d^2S \tag{17}$$

où $f\,(x,y,z)$ est une fonction scalaire à trois dimensions quelconque, V est un volume et ∂V est le bord de ce volume.

En conséquence, la force de pression totale exercée par l'environnement sur (K) peut également s'écrire :

$$\overrightarrow{F_p} = -\iiint_{(K)} \left(\overrightarrow{\nabla} P\,(x,y,z)\right) d^3V \tag{18}$$

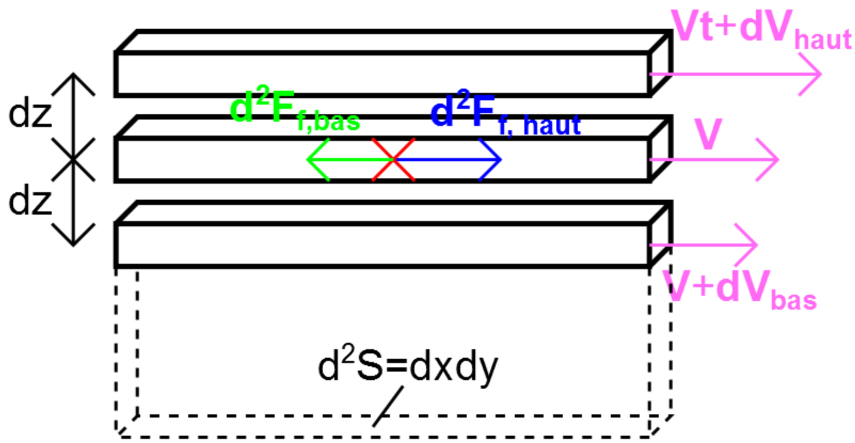

FIGURE 7 –
Représentation schématique des forces de frottement se produisant entre des particules d'air.

Si (K) est maintenant une particule d'air, (K) peut être assimilé à un volume élémentaire (d^3V), si bien que l'intégrale disparaît. La force de pression exercée sur une particule d'air s'écrit :

$$d^3\overrightarrow{F_p} = -\left(\overrightarrow{\nabla} P\left(x, y, z\right)\right) d^3V \tag{19}$$

1.3.3 La force de frottement

Quand des particules d'air voisines ont des vitesses différentes, des frottements se produisent entre elles. De même, des frottements se produisent entre les particules d'air au contact du sol et le sol lui-même, dès que ces particules ont une vitesse non nulle.

Quand dans un fluide deux couches fines (épaisseur Δx) glissent les unes sur les autres à cause de leurs vitesses différentes (surface de contact δS), la première exerce la force de frottement suivante sur la seconde :

$$\delta\overrightarrow{F_{f,1.\to 2.}} = \eta \delta S \frac{\Delta \overrightarrow{V}}{\Delta x} \tag{20}$$

où η est la viscosité dynamique du fluide et $\Delta\overrightarrow{V}$ est égal à $\overrightarrow{V_{1.}} - \overrightarrow{V_{2.}}$ où $\overrightarrow{V_{1.}}$ est la vitesse de la premère couche et $\overrightarrow{V_{2.}}$ est la vitesse de la deuxième couche. Figure 7 montre le cas particulier de trois couches élémentaires glissant horizontalement l'une sur l'autre (épaisseur dz, surface de contact $d^2S = dxdy$).

D'après équation (20), dans cette configuration, la couche du haut exerce la force de frottement suivante sur la couche du milieu :

$$d^2\overrightarrow{F_{f,\text{haut}}}\left(x, y, z + \frac{dz}{2}\right) = \eta\left(x, y, z\right) dxdy \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x, y, z + \frac{dz}{2}\right) \tag{21}$$

à condition que $\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial z}$ soit constant entre z et $z+dz$ et égal à $\frac{\overrightarrow{V} + d\overrightarrow{V_{\text{haut}}} - \overrightarrow{V}}{dz}$, ce qui est approximativement vrai puisque dz est une longueur élémentaire.

D'après équation (20), dans cette configuration, la couche du bas exerce la force de frottement suivante sur la couche du milieu :

$$d^2\overrightarrow{F_{f,\text{bas}}}\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right)=-\eta\left(x,y,z\right)dxdy\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right)\tag{22}$$

La formule de Taylor nous dit qu'une fonction $f\left(x\right)$ dérivable N fois sur $I\subset\mathbb{R}$ au voisinage de $x_0\in I$ peut être approximée de la manière suivante :

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{1}{1!}\frac{df}{dx}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{1}{N!}\frac{d^Nf}{dx^N}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^N\tag{23}$$

Soit $f=\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}$ et $N=1$. Nous avons alors :

$$\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right)=\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z\right)+\frac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\frac{dz}{2}\tag{24}$$

et

$$\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right)=\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z\right)-\frac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\frac{dz}{2}\tag{25}$$

La force de frottement résultante appliquée sur la couche du milieu est la somme de la force appliquée par la couche du haut et de celle appliquée par la couche du bas :

$$d^3\overrightarrow{F_f}\left(x,y,z\right)=d^2\overrightarrow{F_{f,\text{haut}}}\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right)+d^2\overrightarrow{F_{f,\text{bas}}}\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right)\tag{26}$$

$$\begin{aligned}d^3\overrightarrow{F_f}\left(x,y,z\right)&=\eta\left(x,y,z\right)dxdy\left[\tfrac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z\right)+\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\tfrac{dz}{2}\right]\\&\quad-\eta\left(x,y,z\right)dxdy\left[\tfrac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\left(x,y,z\right)-\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\tfrac{dz}{2}\right]\end{aligned}\tag{27}$$

$$d^3\overrightarrow{F_f}\left(x,y,z\right)=\eta\left(x,y,z\right)dxdydz\frac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\tag{28}$$

Ce résultat n'est valable que dans le cas particulier d'un écoulement horizontal. Il se laisse généraliser pour un écoulement quelconque par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}d^3\overrightarrow{F_f}\left(x,y,z\right)&=\eta\left(x,y,z\right)dxdydz\Delta\overrightarrow{V}\left(x,y,z\right)\\&=\eta\left(x,y,z\right)dxdydz\left[\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial x^2}\left(x,y,z\right)+\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial y^2}\left(x,y,z\right)+\tfrac{\partial^2\overrightarrow{V}}{\partial z^2}\left(x,y,z\right)\right]\end{aligned}\tag{29}$$

ou bien avec $\nu=\frac{\eta}{\rho}$ la viscosité cinématique :

$$d^3\overrightarrow{F_f}\left(x,y,z\right)=\nu\left(x,y,z\right)d^3m\Delta\overrightarrow{V}\left(x,y,z\right)\tag{30}$$

1.4 Expression de l'équation de mouvement dans le repère galiléen

A partir de maintenant, la notation tient compte de la dépendance temporelle des champs tridimensionnels introduits précédemment. Cependant, les opérateurs $\overrightarrow{\nabla}$ et Δ ne s'appliquent toujours que sur les trois composantes spatiales, pas sur la composante temporelle.

A partir des équations (2), (8), (19) et (30), on peut écrire :

$$d^3\overrightarrow{F_g}(x,y,z,t) + d^3\overrightarrow{F_p}(x,y,z,t) + d^3\overrightarrow{F_f}(x,y,z,t) = d^3m\overrightarrow{a}(x,y,z,t) \qquad (31)$$

$$\begin{aligned} &-gd^3m\overrightarrow{k}(x,y,z,t) - \left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right)d^3V(x,y,z,t) + \nu(x,y,z,t)\,d^3m\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t) \\ &= d^3m\overrightarrow{a}(x,y,z,t) \end{aligned} \qquad (32)$$

Si l'on divise équation (32) par la masse de la particule d'air d^3m, on obtient :

$$\overrightarrow{a}(x,y,z,t) = -g\overrightarrow{k}(x,y,z,t) - \frac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right) + \nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t) \qquad (33)$$

L'accélération $\overrightarrow{a}(x,y,z,t)$ est la dérivée totale de la vitesse $\overrightarrow{V}(x,y,z,t)$:

$$\overrightarrow{a}(x,y,z,t) = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt}(x,y,z,t) = \frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}(x,y,z,t) + \overrightarrow{V}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}(x,y,z,t) \qquad (34)$$

si bien que l'équation (33) peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}(x,y,z,t) \;=\; &-\overrightarrow{V}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}(x,y,z,t) - g\overrightarrow{k}(x,y,z,t) \\ &-\tfrac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right) + \nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t) \end{aligned} \qquad (35)$$

Les termes suivants apparaissent dans l'équation (35) :
$\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}(x,y,z,t)$ est la dérivée temporelle de la vitesse,
$-\overrightarrow{V}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}(x,y,z,t)$ est l'advection de la vitesse,
$-g\overrightarrow{k}(x,y,z,t)$ est l'accélération de pesanteur,
$-\frac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right)$ est l'accélération causée par le gradient de pression,
$\nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t)$ est l'accélération causée par les frottements.

1.5 Expression de l'équation de mouvement dans le repère tournant

Pour décrire le mouvement de l'air dans l'atmosphère terrestre, il est nécessaire d'écrire l'équation de mouvement dans un repère fixé dans (ou sur) la Terre (et qui tourne avec elle) (voir figure 1). Nous avons vu que les équations (1) et (2) n'étaient pas valables dans un tel repère. Il est cependant possible d'écrire maintenant les fonctions vectorielles de l'équation (35) (dérivée dans le repère galiléen) dans le repère tournant.

Soient $\overrightarrow{e'_x}$, $\overrightarrow{e'_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ les vecteurs unitaires du repère galiléen, soient $\overrightarrow{e_x}(t)$, $\overrightarrow{e_y}(t)$ et $\overrightarrow{e_z}$ les vecteurs unitaires d'un repère fixé au centre de la Terre qui tourne avec elle (voir figure 8). $\theta(t)$ soit l'angle de rotation du repère tournant par rapport au repère galiléen. Nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{e_x}(t) = \cos\theta(t)\,\overrightarrow{e'_x} + \sin\theta(t)\,\overrightarrow{e'_y} \qquad (36)$$

et

$$\overrightarrow{e_y}(t) = -\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e'_x} + \cos\theta(t)\,\overrightarrow{e'_y} \qquad (37)$$

$\overrightarrow{e_x}(t)$ et $\overrightarrow{e_y}(t)$ dépendent de t, parce qu'ils tournent par rapport au repère galiléen. Leurs dérivées dans le repère galiléen ne sont donc pas nulle, mais égales à :

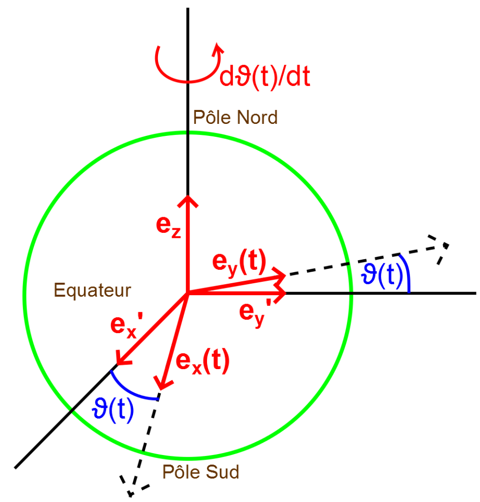

FIGURE 8 –
Représentation des vecteurs unitaires utilisés.

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}(t)\right|_{\text{gal}} = -\frac{d\theta}{dt}(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e'_x} + \frac{d\theta}{dt}(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{e'_y} = \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) \tag{38}$$

et

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt}(t)\right|_{\text{gal}} = -\frac{d\theta}{dt}(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{e'_x} - \frac{d\theta}{dt}(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e'_y} = -\frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) \tag{39}$$

La dépendance temporelle de $\overrightarrow{e'_x}$ et $\overrightarrow{e'_y}$ ne sera pas notée, alors que ces deux vecteurs unitaires tournent par rapport au repère tournant. On peut aussi écrire :

$$\overrightarrow{e'_x} = \cos\theta(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) - \sin\theta(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) \tag{40}$$

$$\overrightarrow{e'_y} = \sin\theta(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) + \cos\theta(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) \tag{41}$$

Et les dérivées de $\overrightarrow{e'_x}$ et $\overrightarrow{e'_y}$ dans le repère tournant valent :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e'_x}}{dt}\right|_{\text{tour}} = -\frac{d\theta}{dt}(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) - \frac{d\theta}{dt}(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) = -\frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e'_y} \tag{42}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e'_y}}{dt}\right|_{\text{tour}} = \frac{d\theta}{dt}(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{e_x}(t) - \frac{d\theta}{dt}(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{e_y}(t) = \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e'_x} \tag{43}$$

La relation entre la dérivée totale d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{X}(x,y,z,t)$ dans le repère galiléen et sa dérivée totale dans le repère tournant s'écrit :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\right|_{\text{gal}} = \left.\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\right|_{\text{tour}} + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{X}(x,y,z,t) \tag{44}$$

où $\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\Big|_{\text{gal}}$ est la dérivée totale de $\overrightarrow{X}(x,y,z,t)$ dans le repère galiléen, $\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\Big|_{\text{tour}}$ est sa dérivée totale dans le repère tournant, et $\wedge$ est le produit vectoriel de deux vecteur.

Les dérivées spatiales d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{X}(x,y,z,t)$ ne dépendent pas du repère considéré. Pour cette raison, on a la relation :

$$\triangle\overrightarrow{X}(x,y,z,t)\Big|_{\text{gal}} = \triangle\overrightarrow{X}(x,y,z,t)\Big|_{\text{tour}} \tag{45}$$

De même, le gradient spatial d'une fonction scalaire ne dépent pas du repère utilisé.

A partir de maintenant,

$$\overrightarrow{X'}(x',y',z,t) = X'(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_x} + Y'(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_y} + Z'(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e_z} \tag{46}$$

est le vecteur position dans le repère galiléen au temps t de la particule d'air qui se trouve à cet instant au point (x',y',z), x', y' et z étant les coordonnées de la particulre d'air dans le repère galiléen au temps t.

$$\overrightarrow{X}(x,y,z,t) = X(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x}(t) + Y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y}(t) + Z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z} \tag{47}$$

est le vecteur position dans le repère tournant au temps t de la même particule d'air (elle se situe à cet instant au point (x,y,z), x, y et z étant les coordonnées de la particulre d'air dans le repère tournant au temps t).

La vitesse d'une particule d'air par rapport au repère galiléen, exprimée dans ce même repère, est donnée par :

$$\overrightarrow{V'_{\text{gal}}}(x',y',z,t) = \frac{d\overrightarrow{X'}}{dt}(x',y',z,t)\Big|_{\text{gal}} = \frac{dX'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_x} + \frac{dY'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_y} + \frac{dZ'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e_z} \tag{48}$$

La même vitesse, exprimée dans le repère tournant, est donnée par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{\text{gal}}}(x,y,z,t) = \frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\Big|_{\text{gal}} &= \frac{dX}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x}(t) + X(x,y,z,t)\,\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}(t)\Big|_{\text{gal}} \\ &\quad + \frac{dY}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y}(t) + Y(x,y,z,t)\,\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt}(t)\Big|_{\text{gal}} \\ &\quad + \frac{dZ}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned} \tag{49}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{\text{gal}}}(x,y,z,t) &= \left(\frac{dX}{dt}(x,y,z,t) - \frac{d\theta}{dt}(t)\,Y(x,y,z,t)\right)\overrightarrow{e_x}(t) \\ &\quad + \left(\frac{d\theta}{dt}(t)\,X(x,y,z,t) + \frac{dY}{dt}(x,y,z,t)\right)\overrightarrow{e_y}(t) + \frac{dZ}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned} \tag{50}$$

La vitesse d'une particule d'air par rapport au repère tournant, exprimée dans ce même repère, est donnée par :

$$\overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t) = \frac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\Big|_{\text{tour}} = \frac{dX}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x}(t) + \frac{dY}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y}(t) + \frac{dZ}{dt}(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z} \tag{51}$$

La même vitesse, exprimée dans le repère galiléen, est donnée par :

$$\overrightarrow{V'_{\text{tour}}}(x',y',z,t) = \frac{d\overrightarrow{X'}}{dt}(x',y',z,t)\Big|_{\text{tour}} = \begin{array}{l} \frac{dX'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_x} + X'(x',y',z,t)\,\frac{d\overrightarrow{e'_x}}{dt}\Big|_{\text{tour}} \\ +\frac{dY'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e'_y} + Y'(x',y',z,t)\,\frac{d\overrightarrow{e'_y}}{dt}\Big|_{\text{tour}} \\ +\frac{dZ'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e_z} \end{array} \tag{52}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V'_{\text{tour}}}(x',y',z,t) &= \left(\tfrac{dX'}{dt}(x',y',z,t) + \tfrac{d\theta}{dt}(t)\,Y'(x',y',z,t)\right)\overrightarrow{e'_x} \\ &+ \left(-\tfrac{d\theta}{dt}(t)\,X'(x',y',z,t) + \tfrac{dY'}{dt}(x',y',z,t)\right)\overrightarrow{e'_y} + \tfrac{dZ'}{dt}(x',y',z,t)\,\overrightarrow{e_z} \end{aligned} \tag{53}$$

Et selon équation (44), nous avons (exprimé dans le repère galiléen) :

$$\overrightarrow{V'_{\text{gal}}}(x',y',z,t) = \overrightarrow{V'_{\text{tour}}}(x',y',z,t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X'}(x',y',z,t) \tag{54}$$

ou bien (exprimé dans le repère tournant) :

$$\overrightarrow{V_{\text{gal}}}(x,y,z,t) = \overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z,t) \tag{55}$$

Selon équation (44), nous avons (exprimé dans le repère galiléen), si l'on pose $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{V_{\text{gal}}}$:

$$\frac{d\overrightarrow{V_{\text{gal}}}}{dt}(x,y,z,t)\Big|_{\text{gal}} = \frac{d\overrightarrow{V_{\text{gal}}}}{dt}(x,y,z,t)\Big|_{\text{tour}} + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{V_{\text{gal}}}(x,y,z,t) \tag{56}$$

$$\overrightarrow{a_{\text{gal}}}(x,y,z,t) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right)\Big|_{\text{tour}} + \frac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{V_{\text{gal}}}(x,y,z,t) \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{\text{gal}}}(x,y,z,t) &= \overrightarrow{a_{\text{tour}}}(x,y,z,t) + \tfrac{d^2\theta}{dt^2}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z,t) + \tfrac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \tfrac{d\overrightarrow{X}}{dt}(x,y,z,t)\Big|_{\text{tour}} \\ &+ \tfrac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \left[\overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t) + \tfrac{d\theta}{dt}(t)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right] \end{aligned} \tag{58}$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = 0$, puisque la rotation de la Terre sur elle-même peut être considérée comme constante sur une échelle de temps de quelques jours. A partir d'ici, nous écrivons $\frac{d\theta}{dt}$ au lieu de $\frac{d\theta}{dt}(t)$.

$$\overrightarrow{a_{\text{gal}}}(x,y,z,t) = \overrightarrow{a_{\text{tour}}}(x,y,z,t) + 2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \overrightarrow{e_z} \wedge \left(\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right) \tag{59}$$

Equation (33) devient (en utilisant aussi équation 45) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{\text{tour}}}(x,y,z,t) &= -2\tfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t) - \left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \overrightarrow{e_z} \wedge \left(\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right) \\ &-g\,\overrightarrow{k}(x,y,z) - \tfrac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla} P(x,y,z,t)\right) + \nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t) \end{aligned} \tag{60}$$

Au cours du changement de repère, deux nouveaux termes sont apparus :
$-2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t)$ (accélération de Coriolis) et
$-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \overrightarrow{e_z} \wedge \left(\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z,t)\right)$ (accélération centrifuge).

NB : A partir de là, la dépendance temporelle de $\overrightarrow{X}(x,y,z,t)$ est triviale. Le vecteur de position dans le repère tournant sera désormais noté $\overrightarrow{X}(x,y,z)$.

Le vecteur unitaire $\overrightarrow{k}(x,y,z)$ peut être écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_x}(t)$, $\overrightarrow{e_y}(t)$ et $\overrightarrow{e_z}$, sachant que $\overrightarrow{k}(x,y,z) = \frac{\overrightarrow{X}(x,y,z)}{\left\|\overrightarrow{X}(x,y,z)\right\|}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{k}\quad(x,y,z) = \quad & \tfrac{X(x,y,z)}{\sqrt{X(x,y,z)^2+Y(x,y,z)^2+Z(x,y,z)^2}}\overrightarrow{e_x}(t) + \tfrac{Y(x,y,z)}{\sqrt{X(x,y,z)^2+Y(x,y,z)^2+Z(x,y,z)^2}}\overrightarrow{e_y}(t) \\ & + \tfrac{Z(x,y,z)}{\sqrt{X(x,y,z)^2+Y(x,y,z)^2+Z(x,y,z)^2}}\overrightarrow{e_z}\end{aligned} \tag{61}$$

L'accélération centrifuge vaut :

$$\begin{aligned}-\left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \overrightarrow{e_z} \wedge \left(\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z)\right) &= - \quad \left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \left|\begin{array}{l}0\\0\\1\end{array}\right. \wedge \left[\left|\begin{array}{l}0\\0\\1\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}X(x,y,z)\\Y(x,y,z)\\Z(x,y,z)\end{array}\right.\right] \\ &= \quad \left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \left|\begin{array}{l}X(x,y,z)\\Y(x,y,z)\\0\end{array}\right.\end{aligned} \tag{62}$$

Elle est perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre sur elle-même et dirigée vers l'extérieur. Son module est égal à $R\cos\sigma\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \approx \left(7.3\times10^{-5}\,s^{-1}\right)^2\times6.4\times10^6\,\text{m} \approx 4.7\times10^{-3}\,\text{m}.s^{-2}$, où σ est la latitude géographique. Cette valeur est beaucoup plus petite que celles des autres accélérations présentes, par exemple l'accélération de pesanteur ($9.82\,\text{m}.s^{-2}$). Il est courant de ne considérer l'accélération centrifuge que comme une petite correction apportée à l'accélération de pesanteur. Cette dernière accélération est dirigée vers le centre de la Terre (avec une grande précision), tandis que l'accélération centrifuge est perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre. La somme des deux („accélération de pesanteur corrigée") n'est dirigée qu'approximativement vers le centre de la Terre. L'accélération de pesanteur utilisée à partir d'ici (notée $\overrightarrow{g}$) est la somme de l'accélération centrifuge et de l'accélération de pesanteur introduite précédemment :

$$\overrightarrow{g}(x,y,z) = -g\overrightarrow{k}(x,y,z) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \overrightarrow{e_z} \wedge \left(\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{X}(x,y,z)\right) \tag{63}$$

Equation (60) devient alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{\text{tour}}}(x,y,z,t) \quad = \quad & -2\tfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t) + \overrightarrow{g}(x,y,z) - \tfrac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right) \\ & +\nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V_{\text{tour}}}(x,y,z,t)\end{aligned} \tag{64}$$

Appliquons un dernier changement de repère. L'équation du mouvement doit être écrite dans un repère fixé à la surface de la Terre qui tourne avec celle-ci (repère de surface). Ce repère est centré en un point quelconque de la surface de la Terre, l'axe des x est dirigé vers l'est, l'axe des y est dirigé vers le nord et l'axe des z vers le haut. Les vecteurs unitaires de ce repère dans les directions x, y et z sont respectivement $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$. Ce repère est fixe par rapport au repère tournant utilisé précédemment, centré au centre de la Terre. En conséquence, toutes les équations valables dans ce repère (comme équation **??**) le restent dans le repère de surface (uniquement les coordonnées utilisées sont différentes). A partir de maintenant, x, y et z sont les coordonnées dans le repère de surface. Nous laissons aussi les indices "tour", mais aussi bien la vitesse que l'accélération sont données par rapport au repère de surface. L'expression de l'équation du mouvement dans ce repère est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t}(x,y,z,t) &= -\overrightarrow{V}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}(x,y,z,t) - 2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{V}(x,y,z,t) + \overrightarrow{g}(x,y,z) \\ &\quad -\frac{1}{\rho(x,y,z,t)}\left(\overrightarrow{\nabla}P(x,y,z,t)\right) + \nu(x,y,z,t)\,\Delta\overrightarrow{V}(x,y,z,t) \end{aligned} \tag{65}$$

to be continued...

Références

[1] Triplet, J.P., und G. Roche, „Météorologie Générale“ (3ème édition), Météo-France, 1986.

to be continued...